हीरोन का सूत्र

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» हीरोन का सूत्र – परिचय और सूत्र का कथन

» अर्ध-परिमाप और सूत्र का सत्यापन (समकोण त्रिभुज से)

» समबाहु और समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना

» दो भुजाएँ और परिमाप देकर तीसरी भुजा व क्षेत्रफल निकालना

» वास्तविक जीवन में हीरोन का सूत्र – बाड़ और घास का व्यय

» भुजाओं के अनुपात से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना

» चतुर्भुज और बहुभुज आकार की भूमि – त्रिभुजों में बाँटकर क्षेत्रफल निकालना

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. एक त्रिभुज की भुजाएँ 13cm, 14cm और 15cm हैं। हीरोन के सूत्र से इसका क्षेत्रफल ज्ञात करो।

› s = (13+14+15)/2 = 42/2 = 21 cm

› s−a = 21−13 = 8, s−b = 21−14 = 7, s−c = 21−15 = 6

› क्षेत्रफल = (21×8×7×6) = 7056 = 84 cm²

उत्तर – त्रिभुज का क्षेत्रफल 84 cm² है।

उदाहरण 2. एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ 3cm, 4cm और 5cm हैं। हीरोन के सूत्र और ½×आधार×ऊँचाई – दोनों विधियों से क्षेत्रफल निकालकर जाँच करो कि दोनों जवाब बराबर आते हैं या नहीं।

› हीरोन का सूत्र: s=(3+4+5)/2=6cm; s−a=3,s−b=2,s−c=1

› क्षेत्रफल = (6×3×2×1) = 36 = 6 cm²

› जाँच: 3²+4²=9+16=25=5² समकोण त्रिभुज; ½×3×4 = 6 cm²

उत्तर – दोनों विधियों से क्षेत्रफल 6 cm² आता है – सूत्र सत्यापित हो गया।

उदाहरण 3. 10 cm भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल हीरोन के सूत्र से ज्ञात करो।

› s = (10+10+10)/2 = 15 cm

› s−a = s−b = s−c = 15−10 = 5 cm

› क्षेत्रफल = (15×5×5×5) = 1875 = 253 cm²

उत्तर – समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 253 cm² है।

उदाहरण 4. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी दो भुजाएँ 8cm और 11cm हैं और जिसका परिमाप 32cm है।

› तीसरी भुजा c = 32 − (8+11) = 32 − 19 = 13cm

› s = 32/2 = 16cm s−a=8, s−b=5, s−c=3

› क्षेत्रफल = (16×8×5×3) = 1920 = 830 cm²

उत्तर – त्रिभुज का क्षेत्रफल 830 cm² है।

उदाहरण 5. एक त्रिकोणीय पार्क ABC की भुजाएँ 120m, 80m और 50m हैं। एक माली को इसके अंदर घास उगानी है और एक ओर 3m चौड़े फाटक के लिए जगह छोड़ते हुए चारों ओर ₹20 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगानी है। घास का क्षेत्रफल और बाड़ लगाने का व्यय ज्ञात करो।

› s = (120+80+50)/2 = 125m; s−a=5, s−b=45, s−c=75

› घास का क्षेत्रफल = (125×5×45×75) = 37515 m²

› बाड़ की लंबाई = (120+80+50) − 3 = 247m; व्यय = 247 × 20 = ₹4940

उत्तर – घास का क्षेत्रफल 37515 m² है और बाड़ लगाने का व्यय ₹4940 है।

उदाहरण 6. एक त्रिकोणीय भूखंड की भुजाओं का अनुपात 3:5:7 है और उसका परिमाप 300m है। इस भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

› भुजाएँ = 3x, 5x, 7x; 15x = 300 x = 20

› भुजाएँ = 60m, 100m, 140m; s = 150m

› क्षेत्रफल = (150×90×50×10) = 6750000 = 15003 m²

उत्तर – भूखंड का क्षेत्रफल 15003 m² है।

उदाहरण 7. एक चतुर्भुज खेत ABCD में विकर्ण AC=15m खींचने पर त्रिभुज ABC की भुजाएँ 9m, 12m, 15m और त्रिभुज ACD की भुजाएँ 15m, 20m, 25m बनती हैं। पूरे चतुर्भुज खेत का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

› त्रिभुज ABC: s=(9+12+15)/2=18; क्षेत्रफल=(18×9×6×3)=2916=54 m²

› त्रिभुज ACD: s=(15+20+25)/2=30; क्षेत्रफल=(30×15×10×5)=22500=150 m²

› चतुर्भुज का कुल क्षेत्रफल = 54 + 150 = 204 m²

उत्तर – पूरे चतुर्भुज खेत का क्षेत्रफल 204 m² है।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• सूत्र लिखते समय s(s−a)(s−b)(s−c) पूरे के ऊपर वर्गमूल () चिह्न लगाना कभी मत भूलना – बिना वर्गमूल के लिखा उत्तर आधे नंबर कटवा देता है।

• सत्यापन (verification) वाले सवालों में दोनों विधियों के सारे चरण साफ-साफ दिखाओ – परीक्षक चरण देखकर नंबर देता है, सिर्फ अंतिम उत्तर लिखने से पूरे नंबर नहीं मिलते।

• यदि उत्तर में 3 जैसा चिह्न बचा रह जाए तो घबराओ मत – कई त्रिभुजों (खासकर समबाहु) का सही उत्तर अपरिमेय (irrational) संख्या में ही आता है, जब तक ना कहा जाए तब तक दशमलव में बदलने की ज़रूरत नहीं।

• परिमाप वाले सवालों में सबसे पहली लाइन में तीसरी भुजा निकालकर साफ़ लिखो – यह स्टेप मार्किंग स्कीम में अलग से नंबर दिलाता है, इसे छोड़ना मत।

• फाटक/गेट/दरवाज़ा जैसे शब्द दिखते ही समझ जाओ – परिमाप में से वह चौड़ाई घटानी है; यह भूल जाना सबसे आम गलती है और नंबर कटवाती है।

• अनुपात से असली भुजाएँ निकालने के बाद एक बार जाँच लो कि तीनों नई भुजाएँ जोड़ने पर दिया गया परिमाप बनता है या नहीं – कोई गलती हो तो तुरंत पकड़ में आ जाएगी।

• चतुर्भुज/बहुभुज क्षेत्रफल के सवाल में विकर्ण को नई साझा भुजा मानकर दोनों त्रिभुजों के हल अलग-अलग साफ़-साफ़ दिखाओ, और आख़िर में दोनों क्षेत्रफल जोड़ना कभी मत भूलना।

एक नज़र में रिवीज़न

› क्षेत्रफल = (s(s−a)(s−b)(s−c)), s = (a+b+c)/2 – केवल भुजाएँ चाहिए, ऊँचाई नहीं!

› समकोण त्रिभुज में हीरोन के सूत्र और ½×आधार×ऊँचाई दोनों से एक ही उत्तर आता है – यही सूत्र की जाँच (verification) का तरीका है।

› समबाहु त्रिभुज में s = 1.5 × भुजा; समद्विबाहु त्रिभुज में दो भुजाएँ बराबर होने से s−a और s−b में से कोई दो पद बराबर आते हैं।

› परिमाप ज्ञात हो तो: तीसरी भुजा = परिमाप − शेष दो भुजाओं का योग; फिर सामान्य हीरोन विधि लगाओ।

› शब्द-समस्या में पहले पहचानो – सवाल क्षेत्रफल माँग रहा है या परिमाप/लंबाई; दोनों बिल्कुल अलग सूत्र से निकलते हैं।

› अनुपात वाले सवाल में x मान लो, परिमाप से x निकालो, फिर असली भुजाएँ लिखकर हीरोन का सूत्र लगाओ।

› कोई भी बहुभुज विकर्णों से त्रिभुजों में बाँटा जा सकता है; हर त्रिभुज पर हीरोन का सूत्र लगाकर सबको जोड़ने पर पूरे बहुभुज का क्षेत्रफल मिलता है।